

# Matematična obravnava izračuna izidov volitev v državni zbor Republike Slovenije

prof. dr. Andrej Bauer  
Fakulteta za matematiko in fiziko  
Univerza v Ljubljani

7. februar 2022

## Kazalo

<b>1</b>	<b>Uvod</b>	<b>2</b>
<b>2</b>	<b>Povzetek ugotovitev</b>	<b>2</b>
<b>3</b>	<b>Priporočila</b>	<b>2</b>
<b>4</b>	<b>Matematična obravnava 90., 91., 92., 93. in 96. člena ZVDZ</b>	<b>3</b>
4.1	Numerično računanje in zaokrožitvene napake . . . . .	3
4.2	Izbira izenačenih kandidatov z žrebom . . . . .	3
4.3	Vhodni podatki . . . . .	3
4.4	Skupni glasovi . . . . .	4
4.5	Pregled računskega postopka . . . . .	5
4.6	Voline liste, ki so dosegle volilni prag . . . . .	6
4.7	Kandidati, izvoljeni v enotah (90. in 91. člen ZVDZ) . . . . .	6
4.7.1	Droopov količnik in zaokrožanje navzgor . . . . .	7
4.7.2	Število mandatov in izbor kandidatov . . . . .	8
4.8	Kandidati, izvoljeni po d'Hondtovi metodi (92. in 93. člen ZVDZ) . . . . .	9
4.8.1	D'Hondtova metoda . . . . .	10
4.8.2	D'Hondtovo zaporedje padajočih količnikov . . . . .	11
4.8.3	Relativni Droopovi ostanki . . . . .	12
4.8.4	Dodeljevanje mandatov po vrstnem redu d'Hondtovih zaporedja . . . . .	13
4.9	Volitve predstavnikov narodnih skupnosti (96. člena ZVDZ) . . . . .	14
	<b>Reference</b>	<b>14</b>

## 1 Uvod

To poročilo zaobjema matematično obravnavo izračuna izidov volitev v državni zbor Republike Slovenije, kot jih v razdelku »X.a Ugotavljanje izida volitev« določa Zakon o volitvah v državni zbor (ZVDZ) [4].

Naročnik matematične obravnave je Državna volilna komisija Republike Slovenije. Obravnavo je neodvisno izdelal prof. dr. Andrej Bauer s Fakultete za matematiko in fiziko, Univerza v Ljubljani.

## 2 Povzetek ugotovitev

Pričujoča matematična obravnava 90., 91., 92., 93. in 96. člena ZVDZ je pokazala, da

*ZVDZ nedvoumno opredeljuje matematični postopek za izračun izidov volitev v državni zbor,*

pri čemer opozarjamo:

- V opisu t.i. Droopove metode v 90. členu ZVDZ je treba pravilno razumeti besedno zvezo »zaokroži na celo število navzgor« kot »naslednje celo število, ki je večje«, glej §4.7.1.
- V nekaterih malo verjetnih primerih bi se lahko zgodilo, da je treba izbirati med več izenačenimi kandidati, listami ali enotami. Glede na to, da v 90. in 96. členu ZVDZ za izenačene kandidate predvideva izbiro z žrebom, predlagamo, da se tudi v vseh ostalih izenačenih primerih uporabi žreb, če tudi jih ZVDZ ne predvideva in ne opredeljuje uporabe žreba.

Implementirali smo referenčni program za izračun izidov volitev v državni zbor in ugotovili:

*Rezultati referenčnega izračuna se ujemajo z uradnimi izidi predčasnih volitev v državni zbor leta 2018 [3].*

Referenčnemu programu so priloženi tudi stresni testi, s katerimi lahko preizkusimo ostale programe za izračun izidov volitev. Referenčni program, stresne teste in navodila za uporabo je prejela Državna volilna komisija.

## 3 Priporočila

1. Programska oprema za izračun izidov volitev v državni zbor naj uporabljajo formulo za izračun Droopovega količnika, ki jo podajamo v §4.7.1.
2. Pripravi se protokol za izvedbo morebitnih žrebov v vseh izenačenih primerih, tudi takšnih, ki jih ZVDZ izrecno ne predvideva, glej §4.2.

## 4 Matematična obravnava 90., 91., 92., 93. in 96. člena ZVDZ

V tem razdelku podamo podrobno razlago računskih postopkov za ugotavljanje izidov volitev v državni zbor. Kot je to v navadi za matematična besedila, bomo uvedli primerne oznake in poimenovali nekatere količine, čeprav le-te v ZVDZ niso poimenovane ali so poimenovane drugače.

V razlagi ne bomo povzeli ZVDZ v celoti, ampak se bomo osredotočili samo na tiste dele, ki so relevantni za ugotavljanje izida. (Na primer, 49. člen ZVDZ določa, da lahko kandidat kandidira v enem, dveh ali enajstih okrajih, a je za izračun pomembno le dejstvo, da kandidat kandidira v enem ali več okrajih. Če bi se zakon spremenil tako, da bi dopuščal kandidaturo v treh okrajih, se v spodaj opisanem postopku ne bi nič spremenilo.)

Pri ugotavljanju izidov konkretna imena enot, okrajev, list in kandidatov niso pomembna, zato bomo uporabili abstraktne oznake, na primer  $e$  za volilno enoto in  $k$  za kandidata. Seveda je treba pri prikazu dejanskih rezultatov predočiti konkretna imena.

Z besedama »kandidat« in »poslanec« v splošnem označujemo ljudi ne glede na spol, kakor je to običajno v slovenskem jeziku.

### 4.1 Numerično računanje in zaokrožitvene napake

Pri izračunu izidov volitev nastopajo cela števila in ulomki. Numeričnim napakam se izognemo tako, da računamo natančno z ulomki in *ne* uporabljamo decimalnih števil, ki lahko povzročijo zaokrožitvene napake. Referenčni program, ki smo ga izdelali, sledi temu načelu in uporablja decimalni izpis končnih rezultatov le za lažje razumevanje. Tudi vsi nadaljnji izračuni v tem poročilu uporabljajo izključno ulomke in niso podvrženi morebitnim numeričnim napakam.

Pogosto v programskem jeziku, razpredelnici ali podatkovni bazi natančno računanje z ulomki ni na voljo ali je težko izvedljivo. V tem primeru moramo uporabiti podatkovni tip float, ki povzroča zaokrožitvene napake. Ker pa so le-te zelo majhne, v praksi ne vplivajo na izračun izida volitev. Kljub temu priporočamo, da se rezultati drugih programov primerjajo z rezultati referenčnega programa, ki računa z ulomki in ne dela nobenih zaokrožitvenih napak.

### 4.2 Izbira izenačenih kandidatov z žrebom

ZVDZ v nekaterih primerih predvideva izbiro izenačenih kandidatov z žrebom. Tudi pri izvedbi 92. in 93. člena ZVDZ se v redkih primerih lahko pripeti, da so izenačene liste ali kandidati, čeprav ta člena žreba ne predvidevata. Smiselno je, da v vseh izenačenih primerih opravimo žreb.

Žrebanje mora biti zasnovano tako, da je možno preveriti njegovo izvedbo, da ob pravilni izvedbi ni možno načrtno vplivati na izid in da so rezultati nedvoumni. Žreb mota biti slučajen in vsi izenačeni kandidati morajo imeti enako verjetnost, da bodo izbrani. Če je treba opraviti več žrebov, morajo biti ti med seboj neodvisni.

Žreb z računalniškim programom, v katerem uporabimo t.i. generator psevdonaključnih števil, tem zahtevam *ne ustreza*. Priporočamo fizični žreb ali računalniški žreb, ki uporablja verificirano programsko in strojno opremo za generiranje slučajnosti.

### 4.3 Vhodni podatki

V državni zbor se voli 90 *poslancev*:

- Država je razdeljena na 8 *volilnih enot*.
- Vsaka volilna enota je razdeljena na 11 *volilnih okrajev*.

- V vsaki enoti se izvoli toliko poslancev, kolikor je okrajev, kar nam da  $88 = 8 \times 11$  poslancev.
- Dodatno se izvoli še 2 poslanca, predstavnika italijanske in madžarske narodne skupnosti.

Volitve predstavnikov italijanske in madžarske narodne skupnosti bomo obravnavali ločeno v §4.9, v nadaljevanju se posvetimo izključno volitvam preostalih poslancev. Vsi pojmi in količine se torej nanašajo na 88 poslancev, ki so izvoljeni na osnovi 90., 91., 92. in 93. člena.

Na volitvah nastopajo *volilne liste*. (ZVDZ uporablja izraza »lista« in »istoimenska lista«, da lahko loči med listami v volilni enoti in listami na nivoju države, a je razlika v poimenovanju za izračun izidov nepomembna.)

Za poslanska mesta se potegujejo *kandidati*:

- Vsak kandidat pripada natanko eni volilni listi.
- Vsak kandidat nastopa v natanko eni volilni enoti.
- Kandidat kandidira v enem ali več okrajih znotraj svoje enote.
- Vsaka lista ima v vsakem okraju največ enega kandidata.

Na volitvah se ugotovi, koliko *veljavnih glasov* je dobil vsak posamezni kandidat v vsakem od okrajev, v katerih je kandidiral. Glas za kandidata je hkrati tudi glas za listo, ki ji pripada. (Ugotavlja se tudi, koliko je bilo vseh glasov in koliko je bilo neveljavnih, a na izid volitev vplivajo le veljavni glasovi.)

ZVDZ predpisuje *volilni prag* 4%. Uporablja se pri določanju volilnih list, katerih kandidati pridejo v poštev za poslanska mesta, glej §4.6.

Odslej bomo namesto »volilna enota«, »volilni okraj« in »volilna lista« rekli kar »enota«, »okraj« in »lista«. Namesto »veljavni glasovi« bomo rekli kar »glasovi«.

Za enote, okraje, liste, kandidate in glasove uvedemo oznake, kot je to prikazano v tabeli 1. To so tudi vsi podatki, ki jih potrebujemo za izračun izida volitev.

Podatek	Oznaka
Množica vseh volilnih enot	Enote
Množica volilnih okrajev v enoti $e$	Okraji( $e$ )
Množica vseh volilnih list	Liste
Množica vseh kandidatov	Kandidati
Volilna lista kandidata $k$	lista( $k$ )
Volilna enota kandidata $k$	enota( $k$ )
Volilni okraji kandidata $k$	okraji( $k$ )
Veljavni glasovi kandidata $k$ v okraju $o$	glasoviKandidat( $k, o$ )
Volilni prag	volilniPrag

Tabela 1: Vhodni podatki

#### 4.4 Skupni glasovi

Iz vhodnih podatkov o glasovih izpeljemo seštevke glasov, ki se uporabljajo v nadaljnjih izračunih. *Skupno število glasov kandidata  $k$*  je seštevke glasov, ki jih dobi v okrajih, v katerih kandidira:

$$\text{glasoviKandidat}(k) := \sum_{o \in \text{okraji}(k)} \text{glasoviKandidat}(k, o).$$

Skupno število glasov liste  $\ell$  v okraju  $o$  je enako številu glasov, ki jih je v tem okraju prejel njen kandidat, ali 0, če lista v tem okraju nima kandidata:

$$\text{glasoviLista}(\ell, o) := \begin{cases} \text{glasoviKandidat}(k, o) & \text{če lista}(k) = \ell \text{ in } o \in \text{okraji}(k), \\ 0, & \text{če lista } \ell \text{ nima kandidata v okraju } o. \end{cases}$$

Skupno število glasov liste  $\ell$  v enoti  $e$  je seštevek glasov, ki jih lista dobi v okrajih te enote:

$$\text{glasoviLista}(\ell, e) := \sum_{o \in \text{Okraji}(e)} \text{glasoviLista}(\ell, o).$$

Skupno število glasov liste na nivoju države je seštevek glasov, ki jih dobi v vseh enotah:

$$\text{glasoviLista}(\ell) := \sum_{e \in \text{Enote}} \text{glasoviLista}(\ell, e).$$

Skupno število glasov v okraju  $o$  je seštevek vseh glasov v tem okraju za vse liste:

$$\text{glasoviOkraj}(o) := \sum_{\ell \in \text{Liste}} \text{glasoviLista}(\ell, o).$$

Skupno število glasov v enoti  $e$  je seštevek vseh glasov v okrajih te enote:

$$\text{glasoviEnota}(e) := \sum_{o \in \text{Okraji}(e)} \text{glasoviOkraj}(o).$$

Skupno število glasov v državi je seštevek vseh glasov v vseh enotah:

$$\text{glasoviDrzava} := \sum_{e \in \text{Enote}} \text{glasoviEnota}(e).$$

Pri računanju skupnih glasov v okraju, enoti in državi se upošteva vse liste, tudi tiste, ki niso dosegle volilnega praga.

## 4.5 Pregled računskega postopka

Računski postopek za ugotavljanje izidov je načeloma možno implementirati na več načinov, ki se razlikujejo po načinu računanja, a vsi dajo enake končne rezultate v skladu z ZVDZ. Vendar pa ni pomemben le pravi končni rezultat, ampak tudi sam postopek, s katerim smo končne rezultate pridobili, saj mora le-ta omogočati transparentno preverjanje pravilnosti izračunov in skladnost z ZVDZ.

Zato priporočamo, da računski postopek za izračun izidov dejansko sledi sosledju členov ZVDZ:

1. Najprej na osnovi drugega odstavka 90. člena ZVDZ izločimo liste, ki niso dosegle volilnega praga, in njihove kandidate.
2. Nato ugotovimo, kateri kandidati so izvoljeni na podlagi 90. in 91. člena ZVDZ, za te bomo rekli, da so *izvoljeni v enotah*.
3. Nazadnje ugotovimo, kateri kandidati so izvoljeni na podlagi 92. in 93. člena ZVDZ, za te bomo rekli, da so *izvoljeni po d'Hondtovi metodi*.

Na ta način je zagotovljena konkretna zakonska osnova za vsako posamezno poslansko mesto, kar olajša preverjanje pravilnosti izidov, omejuje možne napake v izračunih in povečuje stabilnost celotnega postopka v primeru napak ali nesporazumov glede interpretacije in pravilne izvedbe posameznih členov. Na primer, če je znano, da je bil poslanec izvoljen na osnovi 90. in 91. člena ZVDZ, potem morebitni nesporazumi ali napake povezane z 92. in 93. členom ZVDZ ne vplivajo na njegovo izvolitev.

Državna volilna komisija je na volitvah v državni zbor leta 2018 že sledila zgornjim načelom, kar je razvidno iz Zapisnika o ugotovitvi izida predčasnih volitev poslancev v Državni zbor Republike Slovenije [5].

## 4.6 Voline liste, ki so dosegle volilni prag

Drugi odstavek 90. člena ZVDZ se glasi:

*Ne glede na določbo prejšnjega odstavka, lista, ki ne izpolnjuje pogoja iz tretjega odstavka 92. člena tega zakona, mandata ne pridobi.*

Tretji odstavek 92. člena ZVDZ se glasi:

*Tiste liste oziroma istoimenske liste, ki na območju države niso dobile najmanj 4% od skupnega števila glasov, se pri delitvi mandatov ne upoštevajo.*

Odstavka upoštevamo tako, da določimo množico list, ki so dosegle volilni prag, na naslednji način. *Delež glasov*  $d(\ell)$  za listo  $\ell$  je razmerje med skupnimi glasovi liste  $\ell$  in skupnim številom glasov:

$$d(\ell) := \frac{\text{glasoviLista}(\ell)}{\text{glasoviDrzava}}.$$

Množica list, ki so dosegle volilni prag je definirana kot

$$\text{ListePrag} := \{\ell \in \text{Liste} \mid d(\ell) \geq \text{volilniPrag}\}.$$

Zakon določa volilni prag 4%, kar pomeni, da število  $d(\ell)$  primerjamo s številom  $4/100$ . Če ima lista delež glasov natanko enak volilnemu pragu, se uvrsti med liste, ki so dosegle volilni prag. Opozorimo naj še, da besedna zveza »liste nad volilnim pragom«, ki se včasih uporablja, ni primerna za opis list, ki so dosegle volilni prag, ker zmotno napeljuje na misel, da lista, ki ima delež glasov enak volilnemu pragu, izpade iz volitev.

Glasovi za liste, ki niso dosegle volilnega praga, *se upoštevajo* v nadaljnjih izračunih. Zakon namreč izloča liste in njihove kandidate in ne volivcev, ki so zanje glasovali.

## 4.7 Kandidati, izvoljeni v enotah (90. in 91. člen ZVDZ)

V naslednjem koraku so nekateri kandidati izvoljeni v poslance na osnovi glasov, ki so bili podeljeni v njihovi enoti. Postopek je opisan v 90. in 91. členu ZVDZ:

### 90. člen

*Število mandatov, ki jih dobi posamezna lista, se ugotovi s količnikom, ki se izračuna tako, da se skupno število glasov, oddanih za vse liste kandidatov v volilni enoti, deli s številom poslancev, ki se volijo v volilni enoti, povečanim za ena, kar se zaokroži na celo število navzgor. S tem količnikom se deli število glasov za listo.*

*Listi pripada toliko mandatov, kolikokrat je količnik vsebovan v številu glasov za listo.*

*Ne glede na določbo prejšnjega odstavka, lista, ki ne izpolnjuje pogoja iz tretjega odstavka 92. člena tega zakona, mandata ne pridobi.*

### 91. člen

*Z liste kandidatov je izvoljenih toliko kandidatov, kolikor mandatov je dobila lista.*

*Z liste kandidatov so izvoljeni kandidati po vrstnem redu dobljenega deleža glasov v skupnem številu glasov v volilnem okraju oziroma v skupnem številu glasov v dveh volilnih okrajih.*

*Če sta dva kandidata dobila enak delež glasov, o izvolitvi med njima odloča žreb.*

Člena opisujeta tako imenovano *Droopovo metodo* [1].

### 4.7.1 Droopov količnik in zaokrožanje navzgor

Ker bomo imeli opravka z zaokrožanjem števil, najprej za realno število  $x$  definiramo *celi del*  $\lfloor x \rfloor$  kot tisto celo število  $k$ , za katerega velja  $k \leq x < k + 1$ ,

$$\lfloor x \rfloor = k \iff k \leq x < k + 1.$$

Na primer  $\lfloor 31/10 \rfloor = 3$ ,  $\lfloor -23/10 \rfloor = -3$  in  $\lfloor 5 \rfloor = 5$ . Podobno definiramo *zgornji celi del*  $\lceil x \rceil$  kot tisto celo število  $k$ , za katerega velja  $k < x \leq k + 1$ . Pozor, v splošnem  $\lceil x \rceil$  ni enako  $\lfloor x \rfloor + 1$ , saj je  $\lceil 42 \rceil = 42 \neq 43 = \lfloor 42 \rfloor + 1$ .

Obravnavajmo sedaj splošni primer volitev, v katerih se liste potegujejo za  $M$  mandatov. V Droopovem sistem predpišemo *količnik*  $D$ , ki določa, koliko glasov je vreden vsak mandat. Če je lista dobila  $N$  glasov, ji pripada  $\lfloor N/D \rfloor$  mandatov.

**Primer 4.1.** Če je količnik  $D = 1000$  in je lista pridobila 11560 glasov, ji pripada  $\lfloor 11560/1000 \rfloor = 11$  mandatov in ostane ji še 560 glasov. Če je lista pridobila 8000 glasov, ji pripada  $\lfloor 8000/1000 \rfloor = 8$  mandatov in porabila je vse glasove.

Kako izberemo primerno vrednost  $D$ ? Če je prenizka, bo listam pripadalo več mandatov, kot jih je na voljo. Da bi to preprečili ne glede na razporeditev glasov med liste, mora veljati

$$\left\lfloor \frac{G}{D} \right\rfloor \leq M,$$

kar je ekvivalentno

$$\frac{G}{M+1} < D.$$

Za  $D$  je smiselno vzeti najmanjšo dopustno vrednost, da bomo podelili čim več mandatov. Če dodatno zahtevamo še, da naj bo  $D$  celo število, zgornja neenačba za vrednost  $D$  narekuje naslednje celo število večje od  $G/(M+1)$ , se pravi

$$D = \left\lceil \frac{G}{M+1} \right\rceil + 1. \quad (1)$$

To količino imenujemo *Droopov količnik*. Je najmanjše celo število, ki zagotavlja, da ne glede na porazdelitev glasov listam skupno ne pripada več mandatov, kot jih je na voljo.

ZVDZ v 90. členu Droopovega količnik (1) opiše z besedno zvezo » $G/(M+1)$  se zaokroži na celo število navzgor«, kar bi lahko koga napeljalo na formulo  $D = \lceil G/(M+1) \rceil$ , ki pa je napačna.

**Primer 4.2.** Denimo, da v neki enoti kandidirajo liste  $A$ ,  $B$  in  $C$ , ki so dobile naslednje število glasov:

Lista	Glasovi
$A$	1000
$B$	3000
$C$	8000

Skupno število glasov je  $1000 + 3000 + 8000 = 12000$ . Če uporabimo formulo  $D = \lceil G/(M+1) \rceil$ , dobimo

$$D = \left\lceil \frac{12000}{12} \right\rceil = \lceil 1000 \rceil = 1000.$$

Torej lista  $A$  dobi  $1000/1000 = 1$  mandat, lista  $B$  dobi  $3000/1000 = 3$  mandate in lista  $C$  dobi  $8000/1000 = 8$  mandatov, skupaj  $1 + 3 + 8 = 12$  mandatov. Čeprav je takšen izid malo verjeten, je nedopusten, saj je treba v enoti izvoliti toliko poslancev, kolikor je okrajev, torej 11.

V originalnem članku H. R. Droop [1] v angleščini zapiše »the next whole number greater than«, v slovenščini »naslednje celo število, ki je večje«, kar je skladno z definicijo (1). Če tudi bi si nespametno domišljali, da se zgornji in podobni primeri v praksi ne bodo zgodili, je natančna vrednost Droopovega količnika pomembna, saj vpliva na vrednosti Droopovih ostankov, ki se uporabljajo v 92. in 93. členu ZVDZ. In ker je dvanajstina vseh števil deljivih z 12, se bo vprašanje zaokrožanja dejansko pojavilo v praksi.

Povzemimo, kako se pravilno določi Droopov količnik na podlagi 90. člena ZVDZ. Če je v neki enoti skupno število glasov enako  $G$ , je Droopov količnik za to enoto enak

$$D = \left\lceil \frac{G}{12} \right\rceil + 1.$$

Vrednost  $D$  lahko opredelimo tudi kot tisto celo število, ki zadošča pogoju

$$0 \leq G - (D - 1) \times 12 < 12.$$

V programu lahko ta pogoj uporabimo za dodatno preverjanje pravilnosti izračuna, s čimer zaznamo morebitno numerično napako, ki bi nastopila zaradi zaokrožanja.

V programu lahko celi del izračunamo s funkcijo `floor`, ki jo vsebuje večina popularnih programskih jezikov, se pravi

$$D = \text{floor}(N/12) + 1.$$

Še enkrat opozarjamo, da je 90. člen napisan tako, da bi lahko programerja navedel k izračunu Droopovega količnika s formulo `ceil(G/12)`, ki je *napačna*.

#### 4.7.2 Število mandatov in izbor kandidatov

Podajmo računski postopek, s katerim izvolimo poslance v enotah. Droopov količnik za enoto  $e$  izračunamo s formulo

$$\text{droopovKolicnik}(e) := \left\lceil \frac{\text{glasoviEnota}(e)}{12} \right\rceil + 1.$$

Število mandatov, ki jih dobi lista  $\ell \in \text{ListePrag}$  v enoti  $e$  na osnovi 90. in 91. člena je enako

$$\text{mandatiEnota}(\ell, e) := \left\lfloor \frac{\text{glasoviLista}(\ell, e)}{\text{droopovKolicnik}(e)} \right\rfloor.$$

Lista, ki ne doseže volilnega praga, ne dobi mandatov.

Nadalje 90. in 91. člen ZVDZ opredeljujeta, kateri kandidati so izvoljeni v enotah. Definirajmo *popularnost* kandidata  $k$  kot razmerje med njegovimi glasovi in vsemi glasovi v okrajih, v katerih je kandidiral:

$$\text{popularnost}(k) := \frac{\text{glasoviKandidat}(k)}{\sum_{o \in \text{okraj}(k)} \text{glasoviOkraj}(o)}.$$

(Če v okrajih kandidata ni bil podeljen niti en glas, dobimo neveljaven ulomek  $0/0$ . V tem primeru za popularnost kandidata vzamemo vrednost 0.) Za vsako listo  $\ell \in \text{ListePrag}$  in enoto  $e$  naj bo

$$\text{Kandidati}(\ell, e) = \{k \in \text{Kandidati} \mid \text{lista}(k) = \ell \text{ in } \text{enota}(k) = e\}$$

množica vseh kandidatov liste  $\ell$  v enoti  $e$ . Kandidate iz množice  $\text{Kandidati}(\ell, e)$  uredimo v padajočem vrstnem redu glede na njihovo popularnost, nato pa izvolimo prvih  $\text{mandatiEnota}(\ell, e)$ . Se pravi, da je najprej izvoljen tisti kandidat  $k$ , ki ima najvišjo vrednost  $\text{popularnost}(k)$ , nato kandidat z naslednjo najvišjo vrednostjo itn.



Lahko se zgodi, da so kandidati po popularnosti izenačeni. Težava nastopi, če moramo izmed  $n$  izenačenih kandidatov izbrati  $m$  poslancev, pri čemer je  $m < n$ . V tem primeru se opravi žreb, kot to predvideva tretji odstavek 91. člena ZVDZ. Le-ta obravnava samo primer  $n = 2$  in  $m = 1$ , a ga lahko smiselno uporabimo tudi v vseh ostalih izenačenih primerih.

ZVDZ ne predpisuje, kaj narediti v primeru, ko ima lista v enoti manj kandidatov, kot ji jih pripada. V tem primeru je smiselno izvoliti vse razpoložljive kandidate.

Z opisanim postopkom za vsako enoto  $e$  in listo  $\ell$  dobimo množico  $\text{izvoljeniEnota}(\ell, e)$ , ki vsebuje tiste kandidate iz liste  $\ell$ , ki so izvoljeni v enoti  $e$  na podlagi 90. in 91. člena ZVDZ. Definirajmo tudi *število podeljenih mandatov liste  $\ell$  v enoti  $e$*  kot

$$\text{podeljeniEnota}(\ell, e) := |\text{izvoljeniEnota}(\ell, e)|,$$

pri čemer  $|S|$  označuje velikost množice  $S$ . Omenimo, da velja

$$\text{podeljeniEnota}(\ell, e) = \min(|\text{Kandidati}(\ell, e)|, \text{mandatiEnota}(\ell, e)).$$

Nadalje definiramo še *število skupno podeljenih mandatov liste  $\ell$  v enotah* kot

$$\text{podeljeniEnota}(\ell) := \sum_{e \in \text{Enote}} \text{podeljeniEnota}(\ell, e)$$

ter *število skupno podeljenih mandatov v enoti  $e$*  kot

$$\text{podeljeniEnota}(e) := \sum_{\ell \in \text{ListePrag}} \text{podeljeniEnota}(\ell, e).$$

#### 4.8 Kandidati, izvoljeni po d'Hondtovi metodi (92. in 93. člen ZVDZ)

Skupno število kandidatov, ki so izvoljeni v posamezni enoti na podlagi 90. in 91. člena ZVDZ, je manjše ali enako 11, zato v tem koraku skupaj izvolimo največ 88 poslancev. V drugem koraku izvolimo še dodatne poslance, da dosežemo natančno 88 izvoljenih poslancev. Postopek določata 92. in 93. člen ZVDZ:

##### 92. člen

*Mandati, ki niso bili razdeljeni v volilnih enotah, se razdelijo na ravni države tako, da se listam oziroma istoimenskim listam dodeli toliko mandatov, kolikor znaša razlika med številom mandatov, ki bi jim pripadli na podlagi seštevka glasov na ravni države, in številom mandatov, ki so jih dobile v volilnih enotah.*

*Za razdelitev teh mandatov se najprej ugotovi, koliko od vseh 88 mandatov bi pripadlo listam oziroma istoimenskim listam sorazmerno številu glasov, ki so jih dobile v vseh volilnih enotah. To se ugotovi na podlagi zaporedja najvišjih količnikov, ki se izračunajo tako, da se seštevki glasov, ki so jih dobile liste oziroma istoimenske liste v vseh volilnih enotah, delijo z vsemi števili od 1 do 88 (d'Hondtov sistem).*

*Tiste liste oziroma istoimenske liste, ki na območju države niso dobile najmanj 4% od skupnega števila glasov, se pri delitvi mandatov ne upoštevajo.*

*Mandati iz prvega odstavka tega člena se dodelijo listam oziroma istoimenskim listam po vrstnem redu najvišjih količnikov iz prejšnjega odstavka, pri čemer se višji količniki štejejo kot mandati, ki jih je lista oziroma istoimenska lista prejela na podlagi 90. člena tega zakona.*

*Če bi kateri od list oziroma istoimenskih list pri delitvi mandatov v skladu s prvim odstavkom tega člena pripadlo manj mandatov, kakor jih je dobila pri delitvi na ravni volilne enote, se pri ugotavljanju, koliko mandatov bi pripadlo listam oziroma istoimenskim listam na podlagi*

seštevkov glasov na ravni države, upošteva zmanjšano skupno število mandatov, ki jih je treba še razdeliti na ravni države.

### 93. člen

Mandati, ki jih dobijo istoimenske liste pri delitvi na državni ravni, se dodelijo listam v volilnih enotah, ki imajo največje ostanke glasov v razmerju do količnika v volilni enoti iz 90. člena tega zakona. Če so v volilni enoti že razdeljeni vsi mandati, se mandat dodeli listi v volilni enoti, v kateri ima lista naslednji največji ostanek glasov v razmerju do količnika v volilni enoti. Z liste kandidatov so izvoljeni kandidati v skladu z 91. členom tega zakona.

Člena opisujeta d'Hondtovo metodo [2].

#### 4.8.1 D'Hondtova metoda

Predpostavimo, da se liste potegujejo za  $M$  mandatov v državnem zboru, pri čemer podelimo mandat za vsakih  $H$  pridobljenih glasov. Ker je treba podeliti vse mandate, moramo določiti  $H$  tako, da bo listam skupno pripadlo natanko  $M$  mandatov, kar izrazimo z enačbo

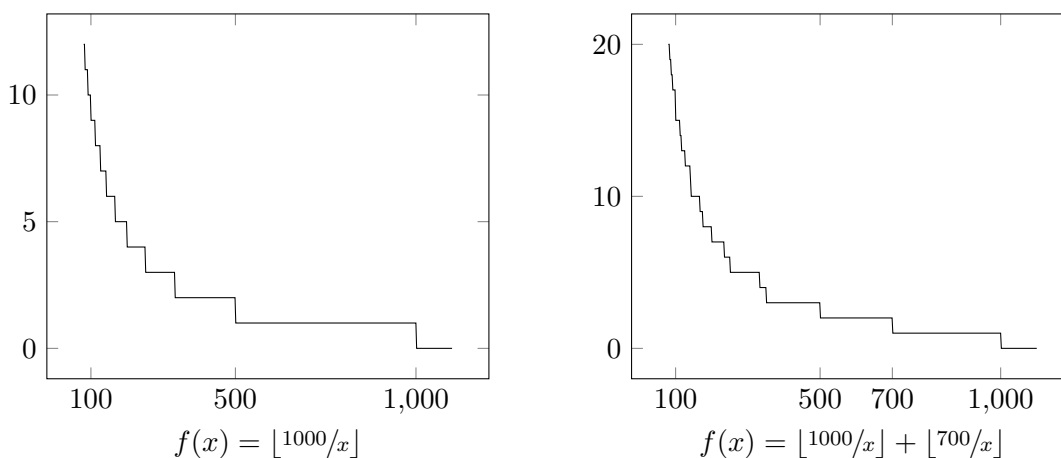
$$\sum_{\ell \in \text{ListePrag}} \left\lfloor \frac{\text{glasoviLista}(\ell)}{H} \right\rfloor = M.$$

Če definiramo funkcijo  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{Z}$  s predpisom

$$f(x) = \sum_{\ell \in \text{ListePrag}} \left\lfloor \frac{\text{glasoviLista}(\ell)}{x} \right\rfloor,$$

se enačba glasi  $f(H) = M$ . Da bi jo bolje razumeli, narišimo graf  $f$  v preprostem primeru.

**Primer 4.3.** Če imamo eno listo, ki je dobila 1000 glasov, dobimo funkcijo  $f(x) = \lfloor 1000/x \rfloor$ , katere graf je prikazan na levi strani slike 1. Vrednost  $f(x)$  narašča, ko zmanjšujemo  $x$ . Za  $x > 1000$  lista ne dobi



Slika 1: Graf d'Hondtove funkcije

nobena mandata, zato je  $f(x) = 0$ . Za  $500 < x \leq 1000$  listi pripada en mandat, zato je tam  $f(x) = 1$ , za  $333\frac{1}{3} < x \leq 500$  je  $f(x) = 2$  in v splošnem za vsak  $n \in \mathbb{N}$  in  $1000/(n+1) < x \leq 1000/n$  velja  $f(x) = n$ .

Če imamo več list, se stopničaste funkcije za posamezne liste seštejejo in spet dobimo stopničasto funkcijo. Primer, ko sta dve listi dobili 1000 in 700 glasov je prikazan na desni strani slike 1. Preskoki vrednosti

so pri  $x = 1000/n$  za  $n \in \mathbb{N}$ , ko prva stranka pridobi en glas več, ter pri  $x = 700/n$ , ko pridobi en glas več druga stranka. Pri nekaterih vrednostih obe stranki hkrati pridobita en glas več, zato tam vrednost  $f$  poskoči za 2. To se na primer zgodi pri  $x = 1000/10 = 700/7$ .

Iz zgornjega primera vidimo, da je pravzaprav pomembno le, pri katerih argumentih vrednost funkcije  $f$  poskoči, kar pa se zgodi za vsak  $\ell \in \text{ListePrag}$  in  $n \in \mathbb{N}$  pri številu

$$dH(\ell, n) := \frac{\text{glasoviLista}(\ell)}{n},$$

ki ga imenujemo  $n$ -ti *d'Hondtov količnik za listo*  $\ell$ . Vrednost  $f(x)$  je namreč enaka številu d'Hondtovih količnikov, ki so večji ali enaki  $x$ .

#### 4.8.2 D'Hondtovo zaporedje padajočih količnikov

Mandate lahko razdelimo med liste, ne da bi eksplicitno računali vrednost  $f(x)$  tako, da zapišemo vse d'Hondtove količnike s pripadajočimi listami v padajočem vrstnem redu količnikov:

$$\begin{aligned} &(\ell_1, dH(\ell_1, n_1)) \\ &(\ell_2, dH(\ell_2, n_2)) \\ &(\ell_3, dH(\ell_3, n_3)) \\ &\vdots \end{aligned}$$

To zaporedje imenujemo *d'Hondtovo zaporedje (padajočih količnikov)*. V njem nastopajo samo liste, ki so dosegle volilni prag. Nato mandate podeljujemo v vrstnem redu d'Hondtovega zaporedja, dokler ne podelimo želenega števila mandatov  $M$ . Tak postopek je enakvreden določanju vrednosti  $H$ , pri kateri velja  $f(H) = M$  in ki listi  $\ell$  dodeli  $\lfloor \text{glasoviLista}(\ell)/H \rfloor$  mandatov. Opisujeta ga 92. in 93. člen ZVDZ.

**Primer 4.4.** Na primer, da so liste  $A, B, C$  dosegle volilni prag in na ravni države dobile naslednje število glasov:

Lista	Glasovi
$A$	50000
$B$	30000
$C$	10000

Njihove d'Hondtove količnike razvrstimo v tabelo

Lista	1	2	3	4	5	6	7	...
$A$	50000	25000	$16666\frac{2}{3}$	12500	10000	$8333\frac{1}{3}$	$7142\frac{6}{7}$	...
$B$	30000	15000	10000	7500	6000	5000	$4285\frac{5}{7}$	...
$C$	10000	5000	$3333\frac{1}{3}$	2500	2000	$1666\frac{2}{3}$	$1428\frac{4}{7}$	...

in tvorimo d'Hondtovo zaporedje padajočih količnikov:

(A, 50000)  
(B, 30000)  
(A, 25000)  
(A, 16666  $\frac{2}{3}$ )  
(B, 15000)  
(A, 12500)  
(A, 10000)  
(B, 10000)  
(C, 10000)  
(A, 8333  $\frac{1}{3}$ )  
(B, 7500)  
⋮

Mandate podeljujemo v naslednjem vrstnem redu: A, B, A, A, B, A, A, B, C, A, B, ...

Vidimo, da se d'Hondtov količnik 10000 pojavi trikrat,

$$dH(A, 5) = dH(B, 3) = dH(C, 1) = 10000,$$

zato bi lahko sedmi, osmi in deveti člen uredili v kateremkoli od vrstnih redov *ABC*, *ACB*, *BAC*, *BCA*, *CAB*, *CBA*. Vrstni red *vpliva* na izid! Na primer, če je treba dodeliti še osem mandatov, bo ena izmed list izpadla, ostali dve pa bosta dobili mandat. A tudi če nobena od list ne bi izpadla, bi bil vrstni red še vedno pomemben, saj bi določal vrstni red, po katerem izbiramo poslance, in s tem posredno tudi na enote, iz katerih so ti poslanci izbrani.

Zakon ne predvideva, kaj storiti v primeru, ko se isti d'Hondtov količnik pojavi večkrat. Ker je zakonodajalec v 90. in 96. členu predvidel žreb v primeru izenačenih kandidatov, bi verjetno lahko sklepali, da se tudi v primeru izenačenih d'Hondtovih količnikov opravi žreb. Tudi v nadaljevanju bomo soočeni s situacijami, ko je treba izbirati med izenačenimi enotami ali kandidati. V vseh primerih priporočamo, da se opravi žreb.

### 4.8.3 Relativni Droopovi ostanki

Ko podeljujemo mandate po d'Hondtovi metodi, se pojavi vprašanje, v kateri enoti in kateremu kandidatu pripada mandat. V ta namen zakon v 93. členu vpelje količino, ki jo pojasnimo v tem razdelku.

Za naravni števili  $n$  in  $k$  naj bo  $n \bmod k$  ostanek pri deljenju števila  $n$  s številom  $k$ , se pravi tisto naravno število  $r$ , ki zadošča  $0 \leq r < k$  in za katerega je  $n - r$  deljivo s  $k$ . Na primer  $15 \bmod 4 = 3$ . V programskih jezikih se namesto  $n \bmod k$  pogosto piše  $n \% k$ .

(Relativni) Droopov ostanek liste  $\ell$  v enoti  $e$  je število

$$\text{droopovOstane}k(\ell, e) := \frac{\text{glasoviEnota}(\ell, e) \bmod \text{droopovKolicnik}(e)}{\text{droopovKolicnik}(e)}.$$

Njegova vrednost je med 0 in 1 in podaja relativni delež glasov, ki jih lista  $\ell$  v enoti  $e$  ni porabila za pridobivanje mandatov na osnovi 90. in 91. člena.

**Primer 4.5.** Na volitvah leta 2018 je bil Droopov količnik za volilno enoto Kranj enak 9589. Lista SDS je v tej volilni enoti dobila skupno 28958 glasov. Ker je  $28958 \bmod 9589 = 191$ , je relativni Droopov ostanek liste SDS v Kranju enak  $\frac{191}{9589} \approx 0,0199186568$ .

#### 4.8.4 Dodeljevanje mandatov po vrstnem redu d'Hondtovih zaporedja

V naslednji fazi listam podeljujemo dodatne mandate v vrstnem redu d'Hondtovega zaporedja padajočih količnikov (četrti odstavek 92. člena). Pred tem smo že opravili podeljevanje mandatov v enotah na podlagi 90. in 91. člena, glej §4.7.

Definirajmo *število d'Hondtovih mandatov liste*  $\ell$ , katere začetna vrednost nastavimo na 0,

$$\text{dhondtoviMandati}(\ell) := 0.$$

V nadaljevanju bomo te količine povečevali za ena in z njimi šteli, kolikokrat se je vsaka lista že pojavila v d'Hondtovem zaporedju.

Definirajmo še *skupno število dodeljenih mandatov liste*  $\ell$  v enoti  $e$ , katere začetna vrednost je enaka  $\text{podeljeniEnota}(\ell, e)$ ,

$$\text{podeljeniSkupno}(\ell, e) := \text{podeljeniEnota}(\ell, e).$$

V nadaljevanju bom to količino povečali za ena vsakič, ko bo lista  $\ell$  v enoti  $e$  prejela nov mandat.

Po vrsti obdelamo vsak člen  $(\ell_i, \text{dH}(\ell, n_i))$  d'Hondtovega zaporedja:

1. Če je skupno število podeljenih mandatov enako 88, se pravi

$$\sum_{\ell \in \text{ListePrag}} \sum_{e \in \text{Enote}} \text{podeljeniSkupno}(\ell, e) = 88,$$

postopek zaključimo.

2. Denimo, da je naslednji člen v d'Hondtovem zaporedju  $(\ell_i, \text{dH}(\ell_i, n_i))$ , kar pomeni, da listi  $\ell_i$  pripada mandat. Najprej povečamo  $\text{dhondtoviMandati}(\ell_i)$  za ena,

$$\text{dhondtoviMandati}(\ell_i) \leftarrow \text{dhondtoviMandati}(\ell_i) + 1.$$

Če je  $\text{dhondtoviMandati}(\ell_i) \leq \text{podeljeniEnota}(\ell_i)$ , je ta mandat  $\ell_i$  že dobila na osnovi 90. člena (četrti odstavek 92. člena), zato nadaljujemo z naslednjim členom v d'Hondtovem zaporedju.

Če je  $\text{dhondtoviMandati}(\ell_i) > \text{podeljeniEnota}(\ell_i)$ , pripada listi  $\ell_i$  nov mandat, ki ga podelimo, kot je to opisano v nadaljevanju.

3. V tem koraku določimo enoto in znotraj nje kandidata liste  $\ell_i$ , ki dobi mandat. Ravnamo se po 93. členu ZVDZ, ki predpisuje, da je treba mandate razvrščati enakomerno po enotah in najprej v enote z višjim relativnim Droopovim ostankom. Se pravi, da najprej izberemo enoto z najvišjim ostankom, nato tisto z naslednjim najvišjim ostankom itn. Če na ta način vsaka enota dobi mandat, postopek ponovimo, začeni spet pri enoti z najvišjim ostankom. Pri izbiri moramo dodatno paziti, da dodeljujemo mandate samo v enotah, ki še nimajo izvoljenih 11 poslancev.

Opisani postopek lahko računsko izvedemo na naslednji način. Za vsako enoto  $e$  definiramo *prioriteto*

$$p(e) := (\text{podeljeniSkupno}(\ell_i, e) - \text{podeljeniEnota}(\ell_i, e), \text{droopovOstane}(\ell_i, e)).$$

Količina  $p(e)$  je urejeni par, v katerem je prva komponenta celo število in druga komponenta ulomek. Prioritete uredimo leksikografsko, pri čemer prvo komponento uredimo v *rastočem* in drugo v *padajočem* vrstnem redu. Na primer, prioriteta  $(0, 1/7)$  je višja od prioritete  $(1, 4/5)$ , ker je  $0 < 1$ , in  $(1, 3/4)$  višja od  $(1, 2/3)$ , ker sta prvi komponenti izenačeni in je  $3/4 > 2/3$ .

Naj bo  $E$  množica vseh enot  $e$ , ki zadoščajo pogoju

- v enoti  $e$  so še na voljo mandati, se pravi  $\sum_{\ell \in \text{ListePrag}} \text{podeljeniSkupno}(\ell, e) < 11$ , in

- v enoti  $e$  je na voljo še kak neizvoljeni kandidat liste  $\ell_i$ .

Če je  $E$  prazna, lista  $\ell_i$  nima primerne kandidata, zato nadaljujemo z naslednjim členom v zaporedju.

Če je  $E$  neprazna, izberemo tisto enoto  $e \in E$ , ki ima najvišjo prioriteto  $p(e)$ . Če je takih enot več, opravimo žreb. Nato v izbrani enoti  $e$  izvolimo tistega še neizvoljenega kandidata  $k$  liste  $\ell_i$ , ki ima največjo vrednost popularnost( $k$ ). Če je takih kandidatov več, opravimo žreb. S tem smo podelili listi  $\ell_i$  mandat v enoti  $e$ , zato povečamo podeljeniSkupno( $\ell_i, e$ ) za ena,

$$\text{podeljeniSkupno}(\ell_i, e) \leftarrow \text{podeljeniSkupno}(\ell_i, e) + 1.$$

Zgornji postopek upošteva peti odstavek 92. člena. Če je namreč podeljeniEnota( $\ell_i$ ) večje od števila mandatov, ki listi pripadajo po d'Hondtovem sistemu, pogoj dhondtoviMandati( $\ell_i$ )  $\geq$  podeljeniEnota( $\ell_i$ ) iz druge točke ne bo izpolnjen in listi ne bomo dali nobenih dodatnih mandatov. Hkrati pa se bo število mandatov, ki so na voljo za ostale stranke, ustrezno zmanjšalo, saj se postopek ustavi takoj, ko je zasedenih vseh 88 poslanskih mest.

#### 4.9 Volitve predstavnikov narodnih skupnosti (96. člena ZVDZ)

Izračun izidov volitev poslancev italijanske in madžarske narodne skupnosti ureja 96. člen ZVDZ:

##### 96. člen

*Za poslanca italijanske oziroma madžarske narodne skupnosti je izvoljen tisti kandidat, ki je dobil največje število glasov. Če je dvoje ali več kandidatov dobilo enako največje število glasov, med njimi o izvolitvi odloči žreb. Žreb opravi volilna komisija posebne volilne enote ob navzočnosti kandidatov oziroma njihovih predstavnikov.*

*Volilni izid iz prejšnjega odstavka ugotovi volilna komisija posebne volilne enote. O tem in o svojem delu sestavi zapisnik, ki ga podpišejo predsednik in člani komisije. Zapisnik in drug volilni material pošlje državni volilni komisiji.*

Vidimo, da je postopek izbire v tem primeru povsem preprost in da ne zahteva nobenega računanja. Izbere se tistega kandidata, ki je dobil največje število glasov. Če je več kandidatov izenačenih, se izbere enega od njih z žrebom.

## Reference

- [1] H. R. Droop. [On Methods of Electing Representatives](#). *Journal of the Statistical Society of London*, 44(2):141–202, junij 1881.
- [2] MichaelGallagher. Proportionality, disproportionality and electoral systems. *Electoral Studies*, 10(1):33–51, marec 1991.
- [3] [Predčasne volitve v Državni zbor 2018](#), junij 2018.
- [4] [Zakon o volitvah v državni zbor](#). Uradni list RS, št. 109/06 – uradno prečiščeno besedilo, 54/07 – odl. US, 23/17 in 29/21.
- [5] [Zapisnik o ugotovitvi izida predčasnih volitev poslancev v Državni zbor Republike Slovenije](#). Uradni list RS, št. 41/2018 in 42/2018, 15. junij 2018.